2次元ペンローズ格子上の電子構造の厳密解

東大・工・物工　時弘哲治，藤原毅夫

1次元フィボナッチ格子上の電子状態と2次元ペンローズ格子上の電子状態のトポロジーに関連した側面を議論した。

1次元フィボナッチ格子の電子構造は，この（周期的な）逐次近似格子の伝播行列（T_k）のトレイスによって特徴付けられる。すなわち，$\lim_{k\to\infty}|(\mathrm{tr}\,T_k)/2|<\infty$ であれば，対応するエネルギーは，許されるエネルギーになる。これは，次の力学系を考える事に等しい。[1]

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= 2x_k y_k - z_k \\
y_{k+1} &= x_k \\
z_{k+1} &= y_k
\end{aligned}
\qquad \text{。} \tag{1}
$$

そして，

$$x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 - 2x_k y_k z_k = 1 + \Lambda^2 \text{。} \tag{2}$$

(2)式は，運動の恒量であり，これを3次元空間中の2次元の多様体とみなし，その位相幾何学的な構造を考える事により，

(a). エネルギー・スペクトラムは，特異連続であり，

(b). エネルギー・ギャップは，積分状態密度中，低エネルギーから見て，$a+b\cdot\tau$（$a, b\in\mathbf{Z}$, $\tau\equiv(\sqrt{5}-1)/2$）の所に生じ，

(c). K周期点は，同じく，$p+q\cdot\tau$,（$p, q\in\mathbf{Q}$）に生じ，$p+q\cdot\tau$ を，フィボナッチ展開した時の，最終的な周期は，K周期になる。

という事がわかる。

他方，2次元ペンローズ格子の電子状態は2次元ペンローズ格子の複雑な幾何学的構造を反映して，波動関数そのものに，特異な状態が現れる。厳密に知られているものは，

(a). コンファインド・ステイト

有限なサポートにのみ振幅を持つ状態である。（例外的に，フラクタル次元，$\ln\tau/\ln 2$，を持つ状態がある。）無限次の縮退をしており，その全状態に対するパーセンテイジも，厳密にわかっている。

(b). セルフシミラー・ステイト

完全に自己相似性を持つ状態で，普通の意味で拡がっても，局在してもいない。（クリティカル。）そのマルチ・フラクタル次元（D_q）は，厳密に計算でき，

$$0 < D_2 < D_1 < D_0 = 2$$

である。

2次元ペンローズ格子の電子状態を特徴付ける力学系は，まだ知られていない。それを見出す事が，今後の課題の1つである。

1) P. A. Kalugin, A. Yu. Kitaev and L. S. Levitov Sov. Phys. JETP **64** (1987) 410.

ホモトピー群を用いた環欠陥の分類とそのエネルギー安定性

慶大・理工　中西　秀，森　弘之

§序

ホモトピー論を用いた秩序状態の欠陥の分類に関しては，既にいくつかの総合報告が出ている。[1-4] それによると，線欠陥や点欠陥の型は，各々，秩序変数を表わす位相空間X（秩序変数空間）の1次元，及び2次元ホモトピー群を用いて分類されることが知られている。我々は，この理論を拡張して，線欠陥がループになった環欠陥の分類のホモトピー論を展開する。また，環欠陥を考えることにより，トポロジカルに安定な点欠陥が必ずしもエネルギー的に安定とは限らないことを示す。

§線欠陥と点欠陥の分類

環欠陥の分類を行なう前に，ホモトピー論を用いた線欠陥と点欠陥の分類の復習をしておこう。

線欠陥が1本入った状態の秩序変数の配位は，数学的には全空間 R^3（3次元ユークリッド空間）から直線Lを除いた空間より，秩序変数空間Xへの写像と考えることができる。この写像の族の連結成分の集合（ホモトピー集合）が，線欠陥の型と1対1に対応しているのであるが，これを数学の記号を用いて $[R^3-L;X]$ と書く。さらに，この $[R^3-L;X]$ は，円周 S^1 からXへの写像のホモトピー集合 $[S^1;X]$ と集合として一致することが知られている。これを R^3-L と S^1 はホモトピー同値であるという。

このホモトピー集合 $[S^1;X]$ は，基点を定めた1次元ホモトピー群 $\pi_1(X,*)$ の共役類の集合に一致する。即ち，線欠陥の型は秩序変数空間Xの一次元ホモトピー群の共役類によって特徴づけられる。また線欠陥の合成則も群の演算に対応していることも知られている。

同様に点欠陥のある秩序変数の配置は $[R^3-P;X]$ に対応している。但しPは R^3 内の1点を表わすものとする。R^3-P と球面 S^2 がホモトピー同値であることに注意すると，点欠陥の型は $[S^2;X]$ の元に対応していて，それはさらに2次元ホモトピー群 $\pi_2(X,*)$ の π_1 による自己同型類に対応していることが知られている。即ち，点欠陥の型は，2次元ホモトピー群の π_1 による自己同型類によって特徴づけられる。